中原名校 2021—2022 学年假期汇编试题

高一数学参考答案（三）

1．【答案】C

【解析】$\because$ 集合 $A=\{1，2，3\}$，$B=\{x\,|\,(x+1)(x-2)<0，x\in\mathbf{Z}\}=\{x\,|-1<x<2，x\in\mathbf{Z}\}=\{0，1\}$，$\therefore A\cup B=\{0，1，2，3\}$．故选 C．

2．【答案】A

【解析】因为命题“$\exists x>0$，$x^2+ax+4<0$”是假命题，所有它的否定命题“$\forall x>0$，$x^2+ax+4\geqslant 0$”是真命题，因为 $x>0$，所以 $ax\geqslant -x^2-4$，即 $a\geqslant -x-\dfrac{4}{x}=-(x+\dfrac{4}{x})$，设 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$，$x>0$，所以 $f(x)\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\dfrac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取“$=$”，所以 $-(x+\dfrac{4}{x})\leqslant -4$，即 $a\geqslant -4$，a 有最小值 -4．故选 A．

3．【答案】D

【解析】要使原函数有意义，需满足 $\begin{cases}3-x>0\\x-1>0\end{cases}$，解得 $1<x<3$．$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,3)$．故选 D．

4．【答案】B

【解析】因为扇形的圆心角为 120°，半径为 3，所以 $S_{扇形}=\dfrac{120\pi\times 3^2}{360}=3\pi$．故选 B．

5．【答案】B

【解析】因为 $\tan\theta=2$，所以 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\cos\theta-\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\cos\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{2}{1-\tan\theta}=\dfrac{2}{1-2}=-2$．故选 B．

6．【答案】D

【解析】设 $x<0$，则 $-x\geqslant 0$，$\because$ 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，$\therefore f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{-x})=-x(1-\sqrt[3]{x})$，$\because$ 函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\therefore f(x)=-f(-x)$，$\therefore f(x)=x(1-\sqrt[3]{x})$．故选 D．

7．【答案】D

【解析】$\because$ 角 α 为锐角，$\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\because$ 角 β 为钝角，$\therefore \alpha+\beta\in(\alpha+\dfrac{\pi}{2}，\alpha+\pi)$，若 $\alpha+\beta\in(\alpha+\dfrac{\pi}{2}，\pi]$，则 $\cos(\alpha+\beta)<\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})=-\sin\alpha=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}<-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，不符题意，故 $\alpha+\beta\in(\pi,\alpha+\pi)$，又 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所

$\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，故选 D．

8．【答案】A

【解析】$\because 0<(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{5}}<(\dfrac{1}{3})^{0}$，$\therefore 0<a<1$，$\because (\dfrac{1}{5})^{-\frac{1}{7}}>(\dfrac{1}{5})^{0}$，$\therefore b>1$，$\because c=\log_7\dfrac{1}{3}<\log_7 1=0$，$\therefore b>a>c$，故选 A．

9．【答案】C

【解析】$\because f(x)$是奇函数，$\therefore f(0)=\cos\varphi=0$，且$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)=\cos(\omega x+\dfrac{\pi}{2})$，

令$2k\pi\leqslant\omega x+\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，结合$\omega>0$，解得$\dfrac{2k\pi}{\omega}-\dfrac{\pi}{2\omega}\leqslant x\leqslant\dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{2\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，由于函数在$[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}]$上单调递减，故：$\begin{cases}\dfrac{2k\pi}{\omega}-\dfrac{\pi}{2\omega}\leqslant-\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{2\omega}\end{cases}$，$k\in\mathbf{Z}$，整理得$\begin{cases}\omega\leqslant 8k+2\\ \omega\leqslant\dfrac{3}{2}-6k\end{cases}$，$k\in\mathbf{Z}$，

取$k=0$，得$\begin{cases}\omega\leqslant\dfrac{3}{2}\\ \omega\leqslant 2\end{cases}$，故$\omega\leqslant\dfrac{3}{2}$，可得$\omega$的最大值为$\dfrac{3}{2}$．故选 C．

10．【答案】A

【解析】$f(x)=(x^2-1)\sin x$的定义域$\mathbf{R}$，关于原点对称，$f(-x)=(x^2-1)\sin(-x)=-(x^2-1)\sin x=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数，其图象关于原点对称，故排除 B；当$0<x<1$时，$f(x)<0$，可排除 C；由$f(x)=0$，可得$x^2-1=0$或$\sin x=0$，解得$x=\pm1$，或$x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，可排除 D，故选 A．

11．【答案】A

【解析】$\because f(x)$为奇函数，$\therefore f(x)+f(-x)=0$，$\therefore \log_{0.5}(a-\dfrac{4}{x+2})+\log_{0.5}(a-\dfrac{4}{-x+2})=0$，

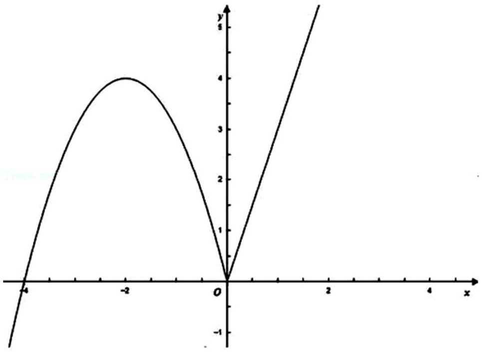
$\therefore \log_{0.5}(\dfrac{ax+2a-4}{x+2}\times\dfrac{ax-2a+4}{x-2})=\log_{0.5}1$，$\therefore \dfrac{a^2x^2-(2a-4)^2}{x^2-4}=1$，$\therefore a^2x^2-(2a-4)^2=x^2-4$，

即$\begin{cases}a^2=1\\(2a-4)^2=4\end{cases}$，解得$a=1$，$\therefore f(x)=\log_{0.5}\dfrac{x-2}{x+2}$，$\because f(x)>0$，即$0<\dfrac{x-2}{x+2}<1$，解得$x>2$，

即$x\in(2,+\infty)$．故选 A．

12．【答案】C

【解析】方程 $f^2(x)+mf(x)=0$ 有 5 个不等的实根，即 $f(x)=0$ 或 $f(x)=-m$ 一共 5 个不等的实根，作出函数函数 $f(x)$ 的大致图象，其中 $f(-2)=4$，其中 $f(x)=0$ 有两个不等实根，所以 $f(x)=-m$ 有三个不等实根，所以 $0<-m<4$，所以 $0<-m<4$，$m\in(-4,0)$．故选 C．



13．【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】函数 $f(x)=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，故答案为：$\dfrac{\pi}{2}$．

14．【答案】$-\dfrac{3}{5}$

【解析】$\because a<0$，$\therefore 3a<0$，$4a<0$，$r=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=|5a|=-5a$（$\theta$ 为第三象限角），$\therefore \cos\theta=-\dfrac{3a}{5a}=-\dfrac{3}{5}$．故答案为：$-\dfrac{3}{5}$．

15．【答案】$[1，\dfrac{4}{3}]$

【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $[-1，1]$ 上是减函数，若 $f(2a-2)\leqslant f(-3a+3)$，则 $-1\leqslant -3a+3\leqslant 2a-2\leqslant 1$，解得，$1\leqslant a\leqslant \dfrac{4}{3}$，实数 a 的取值范围为 $[1，\dfrac{4}{3}]$．故答案为：$[1，\dfrac{4}{3}]$．

16．【答案】②③④

【解析】①点 $(-\dfrac{5}{12}\pi,0)$ 不满足函数的表达式，所以它不是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，不正确；

② $x=\dfrac{\pi}{3}$ 函数取得最大值，是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，正确；

③函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π，正确；

④将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后，得到函数 $f(x)=\cos 2x+1$，函数是偶函数．正确．

故答案为：②③④．

17. 【答案】（1）$A=\{x\,|\,0<x<4\}$，当 $m=2$ 时，$B=\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 4\}$，（2 分）

$\therefore A\cap B=\{x\,|\,2\leqslant x<4\}$，且 $U=\mathbf{R}$，

$\therefore \complement_U(A\cap B)=\{x\,|\,x<2$ 或 $x\geqslant 4\}$；（5 分）

（2）$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，

① $B=\varnothing$ 时，$m>3m-2$，解得 $m<1$；（7 分）

② $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases} m\geqslant 1 \\ m>0 \\ 3m-2<4 \end{cases}$，解得 $1\leqslant m<2$；

综上，实数 m 的取值范围为 $(-\infty,2)$．（10 分）

18. 【答案】（1）因为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$，

因为 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，（3 分）

可得 $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{13}{14}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$．（6 分）

（2）$\because \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha$ 是锐角，

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，（7 分）

$\because \cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\beta$ 是锐角，

$\therefore \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，（9 分）

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，（10 分）

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore 0<\alpha+\beta<\pi$，

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$．（12 分）

19. 【答案】（1）原式 $=(2^2\times 3^3)+1-7+\pi-3=99+\pi$；（6 分）

（2）原式 $=2+2+\lg 4+\lg 5-\lg 2=4+\lg 2+\lg 5=5$．（12 分）

20. 【答案】（1）

$f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=2\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)+\frac{1}{2}=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，（4 分）

令 $2x+\frac{\pi}{6}\in[2k\pi-\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{\pi}{2}]$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x\in[k\pi-\frac{\pi}{3}，k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3}，k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$．（6 分）

（2）因为 $f(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12})=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin[2(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{6}]=\frac{4}{5}$，即 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，（8 分）

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

所以 $\alpha+\beta\in(-\frac{\pi}{2}，\pi)$，（10 分）

又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}<0$，所以 $\alpha+\beta\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{5}{13}$，所以

$\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}-(-\frac{12}{13})\times\frac{4}{5}=\frac{63}{65}$．（12 分）

21．【答案】（1）由已知得 f（3）$=1$，即 $\log_m 3=1$，

故 $m=3$，$f(x)=\log_3 x$，

方程 $f^2(x)+(m-1)f(x)+1-m^2=0$，可化为 $f^2(x)+2f(x)-8=0$，（3 分）

即 $f(x)=2$ 或 $f(x)=-4$，即 $\log_3 x=2$ 或 $\log_3 x=-4$，

故 $x=9$ 或 $x=\frac{1}{81}$；（6 分）

（2）$\because x\in(\frac{1}{3},9)$，$\therefore \log_3 x\in(-1,2)$，

$[1+f(x)]\cdot[a-f(x)]>0$ 可化为 $(\log_3 x+1)\cdot(\log_3 x-a)<0$，（10 分）

$\therefore -1$，2 是关于 t 的方程 $(t+1)\cdot(t-a)=0$ 的两根，

$\therefore a=2$．（12 分）

22．【答案】（1）$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，$\therefore f(x)\leqslant 1$，即 $\sin(x+\frac{\pi}{3})\leqslant\frac{1}{2}$，（2 分）

结合 $y=\sin u$ 的图象可得 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{13\pi}{6}$，即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{11\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{11\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$．（6 分）

（2）将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），可得 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象；

再将所得图象向右平移个 $\frac{\pi}{3}$ 单位长度，得到函数 $g(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，（8 分）

当 $0\leqslant x\leqslant m$ 时，$-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2m-\frac{\pi}{3}$，（9 分）

$\because g(x)$ 在区间 $[0，m]$ 上的最大值为 2，

$\therefore$ 结合 $y=\sin\mu$ 的图象可得 $2m-\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $m\geqslant\frac{5\pi}{12}$，

故 m 的取值范围是 $[\frac{5\pi}{12},+\infty)$．（12 分）