中原名校2021—2022学年假期汇编试题

高一数学参考答案（一）

1．【答案】D

【解析】∵集合$M=\{x\,|\,0<x<4\}$，$N=\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$，∴$M\cap N=\{x\,|\,0<x\le 3\}$，故选D．

2．【答案】A

【解析】由$\dfrac{1}{a}<1$，可得$a>1$或$a<0$，

故，由$a>1$，能够推出$\dfrac{1}{a}<1$，故，$a>1$，是$\dfrac{1}{a}<1$的充分条件，

由$\dfrac{1}{a}<1$，不能够推出$a>1$，故，$a>1$，是$\dfrac{1}{a}<1$的不必要条件，

综上所述，$a>1$，是$\dfrac{1}{a}<1$的充分不必要条件，故选A．

3．【答案】C

【解析】因为$x>0$，$y>0$，且$x+y=4$，则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y})(x+y)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\times(10+\dfrac{y}{x}+\dfrac{9x}{y})\geqslant$

$\dfrac{1}{4}\times(10+2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{9x}{y}})=4$，当且仅当$\dfrac{y}{x}=\dfrac{9x}{y}$且$x+y=4$，即$x=y=1$时等号成立，此时则

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}$的最小值为4．故选C．

4．【答案】C

【解析】由于$313^\circ=360^\circ-67^\circ$，故$360^\circ$与$-67^\circ$终边相同，$787^\circ=720^\circ+67^\circ$，故$787^\circ$与$67^\circ$终边相同，$-655^\circ=-720^\circ+65^\circ$，故$-655^\circ$与$65^\circ$终边相同，$-576^\circ=-720^\circ+144^\circ$，故$-576^\circ$与$144^\circ$终边相同．故选C．

5．【答案】C

【解析】∵ $\sin(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)=-\dfrac{4}{5}$，∴ $\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\cos[\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)]=\sin(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)=-\dfrac{4}{5}$，故选C．

6．【答案】C

【解析】∵$a=\log_2\dfrac{1}{3}<\log_2\dfrac{1}{2}=-1$，$-1=\log_3\dfrac{1}{3}<\log_3\dfrac{1}{2}<\log_3 1=0$，即$-1<b<0$，$c=3^{-\frac{1}{2}}>0$，

∴$c>b>a$．故选C．

7．【答案】A

【解析】函数$f(x)=4\cos(\pi x+\dfrac{\pi}{3})+1$，令$\pi x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得：$x=k+\dfrac{1}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=-1$ 时，可得 $x=-\frac{5}{6}$．所以函数的一个对称中心 $(-\frac{5}{6}，1)$．故选 A.

8．【答案】D

【解析】$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，由 $f(x)=\lg(3x+1)-1>0$ 得 $x>3$，根据偶函数对称性可知，当 $x<0$ 时，$x<-3$，综上可得 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty，-3)\cup(3，+\infty)$．故选 D.

9．【答案】C

【解析】因为函数 $f(x)=\sin-\cos x\ \ =\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=2\pi$，故选项 A 错误；

$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，故选项 B 错误；

因为 $x\in$（0，$\frac{3\pi}{4}$），所以 $x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，由正弦函数的单调性可知，$f$（$x$）在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故选项 C 正确；

因为 f（$\frac{\pi}{4}$）$=0$，故函数 f（x）的图象不关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故选项 D 错误．故选 C.

10．【答案】A

【解析】$\because 3\sin 2\alpha-2\sin^2\alpha=0$，$\therefore 3\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=0$，即 $\sin\alpha(3\cos\alpha-\sin\alpha)=0$，

$\therefore \sin\alpha=0$ 或 $\tan\alpha=3$，$\because \cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)$，

$\therefore$ 当 $\sin\alpha=0$ 时，$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-2\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $\tan\alpha=3$ 时，$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$．故选 A.

11．【答案】B

【解析】当 $x\leqslant 0$ 时，f（x）$=\log_4$（$3-x$）单调递减，且 f（x）为偶函数，根据偶函数对称性可知，当 $x>0$ 时，f（x）单调递增，对任意的 $x\in[0,b+1]$，均有 $f(x+b)\geqslant f(2x)$，故 $|x+b|\geqslant|2x|$，即 $|x+b|\geqslant 2x$，由区间的定义可知，$b>-1$，若 $x+b\geqslant 0$，则 $x+b\geqslant 2x$，即 $x\leqslant b$，由于 x 的最大值 $b+1$，故 $b\geqslant x$ 显然不恒成立，若 $x+b<0$，则 $x+b\leqslant -2x$，即 $x\leq -\frac{1}{3}b$，

所以 $b+1\le -\frac{1}{3}b$，解得 $b\le -\frac{3}{4}$，故 b 的最大值 $-\frac{3}{4}$．故选 B．

12．【答案】D

【解析】将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到

$y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象，

再向上平移 1 个单位长度可得到 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+1$ 的图象，故 A，B 错误．

令 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$x=-\frac{\pi}{12}$；当 $k=1$ 时，

$x=\frac{5}{12}\pi$，故 C 错误．

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减，故 D 正确，故选 D．

13．【答案】2

【解析】由题意得：$m^2-m-1=1$，解得：$m=-1$ 或 $m=2$，而函数是偶函数，故 $m=2$，故答案为：2．

14．【答案】6

【解析】∵不等式 $ax^2+bx+1>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<\frac{1}{3}\}$，∴$a<0$，∴原不等式等价于 $-ax^2-bx-1<0$，由根与系数的关系，得 $-1+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a}$，$-1\times 3=\frac{1}{a}$，∴$a=-3$，$b=-2$，

∴$ab=6$．故答案为：6．

15．【答案】$-\frac{7}{9}$

【解析】因为 $2\alpha+\frac{2\pi}{3}=2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)-1=-\frac{7}{9}$．故答案为：$-\frac{7}{9}$．

16．【答案】$t\leqslant -2$ 或 $t=0$ 或 $t\geqslant 2$

【解析】若函数 $f(x)\leqslant t^2-2at+1$ 对所有的 $x\in[-1,1]$都成立，由已知易得 $f(x)$ 的最大值是 1，∴$1\leqslant t^2-2at+1\Leftrightarrow 2at-t^2\leqslant 0$，设 $g(a)=2at-t^2$（$-1\leqslant a\leqslant 1$），欲使 $2at-t^2\leqslant 0$ 恒成立，则 $\begin{cases}g\left(-1\right)\le 0\\ g\left(1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow t\geqslant 2$ 或 $t=0$ 或 $t\leqslant -2$．答案：$t\leqslant -2$ 或 $t=0$ 或 $t\geqslant 2$.

17. 【答案】（1）要使 f（x）有意义，则 $\begin{cases}4-x>0\\2x+1>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x<4\\x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 得 $-\dfrac{1}{2}<x<4$，

即函数的定义域 A＝（$-\dfrac{1}{2}$，4）．（3 分）

当 m＝2 时，不等式等价为（x－4）（x－3）≤0 得 3≤x≤4，即 B＝[3，4]，

则 $\complement_{\mathbf{R}}A$＝（－∞，$-\dfrac{1}{2}$]∪[4，+∞），

则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B$＝（－∞，$-\dfrac{1}{2}$]∪[3，+∞）．（5 分）

（2）（$x-m^2$）（x－2m+1）＝0 得根为 $x=m^2$，或 x＝2m－1，

∵m^2-2m+1＝（m－1）^{2}≥0，∴m^2≥2m－1，

∴（$x-m^2$）（x－2m+1）≤0 的解集为 B＝[2m－1，m^2]，

若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分条件，

则 $A\subseteq B$，（8 分）

即 $\begin{cases}m^2\geq 4\\2m-1\leq -\dfrac{1}{2}\end{cases}$，得 $\begin{cases}m\geq 2\text{或}m\leq -2\\m\leq \dfrac{1}{4}\end{cases}$，得 m≤－2，

即实数 m 的取值范围是（－∞，－2]．（10 分）

18. 【答案】（1）原式＝sin（$4\pi+\dfrac{\pi}{6}$）+cos（$8\pi+\dfrac{\pi}{3}$）－tan（$6\pi+\dfrac{\pi}{4}$）

$=\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1=0$．（6 分）

（2）原式 $=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(-\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\dfrac{2+1}{2-1}=3$．（12 分）

19. 【答案】（1）原式 $=0.3^{3\times(-\frac{1}{3})}-2^{4\times\frac{1}{4}}+1-\sqrt[4]{4^4}=\dfrac{10}{3}-2+1-4=-\dfrac{5}{3}$；（6 分）

（2）原式 $=\dfrac{\log_2 2}{\log_2\dfrac{1}{4}}+(\lg 4^2+\lg\dfrac{5}{8})+\mathrm{e}^{\ln 8}=\dfrac{1}{-2}+\lg 10+8=\dfrac{17}{2}$．（12 分）

20. 【答案】（1）由题意，当 x＜0 时，－x＞0，

则 f（－x）＝－（－x）^{2}+2（－x）＝－x^2－2x，（2 分）

由 f（x）是定义在 **R** 上的奇函数，

得 f（x）＝－f（－x）＝x^2+2x，且 f（0）＝0，

综上，$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x，x>0\\0，x=0\\x^2+2x，x<0\end{cases}$．（6 分）

（2）（i）当 $x>0$ 时，$-x^2+2x<3$ 恒成立；
（ii）当 $x=0$ 时，$0<3$ 显然成立；（9 分）
（iii）当 $x<0$ 时，$x^2+2x<3$，即 $x^2+2x-3<0$，
解得 $-3<x<1$，此时 $-3<x<0$，
综上，得 $x>-3$，即不等式的解集为（-3，$+\infty$）．（12 分）

21．【答案】（1）$f\left(x\right)=(\sin x+\cos x)^2+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$

$=1+\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$．（3 分）

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leq\dfrac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，$\dfrac{\pi}{12}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$；（6 分）

（2）∵ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴ $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{4\pi}{3}\right)$，

∴ $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}，1\right]$，（10 分）

∴ $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1\in\left(1-\sqrt{3}，3\right]$，

故此函数当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，值域为 $\left(1-\sqrt{3}，3\right]$．（12 分）

22．【答案】（1）由 $a^x-1>0$，得 $a^x>1$．（1 分）
当 $a>1$ 时，$x>0$；当 $0<a<1$ 时，$x<0$．
所以 $f(x)$ 的定义域是当 $a>1$ 时，$x\in$（0，$+\infty$）；
当 $0<a<1$ 时，$x\in$（$-\infty$，0）．（3 分）
（2）当 $a>1$ 时，任取 x_1、$x_2\in$（0，$+\infty$），且 $x_1<x_2$，
则 $a^{x_1}<a^{x_2}$，所以 $a^{x_1}-1<a^{x_1}-1$．（4 分）
因为 $a>1$，所以 $\log_a(a^{x_1}-1)<\log_a(a^{x_1}-1)$，即 $f(x_1)<f(x_2)$．
故当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在（0，$+\infty$）上是增函数．（6 分）
∵ $f(x)<f(1)$；∴ $a^x-1<a-1$，
∵ $a>1$，∴ $x<1$，
又∵ $x>0$，∴ $0<x<1$；（8 分）

（3）∵ $g(x)=f(x)-\log_2(1+2^x)=\log_2\left(1-\dfrac{2}{2^x+1}\right)$ 在[1，3]上是单调增函数，

∴ $g(x)_{\min}=-\log_2 3$，
∵ $m<g(x)$，∴ $m<-\log_2 3$，即 $m\in$（$-\infty$，$-\log_2 3$）．（12 分）