中原名校 2021—2022 学年假期汇编试题

高一数学参考答案（二）

1．【答案】C

【解析】因为$N=\{x\,|\,x^2<2\}=(-\sqrt{2}，\sqrt{2})$，$M=\{-1，0，1，2\}$，所以$M\cap N=\{-1，0，1\}$．故选 C．

2．【答案】B

【解析】$\because a>0$，$b>0$，且$2a+b=2ab$，$\therefore \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a}=1$，

则$a+2b=(a+2b)(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a})=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{5}{2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$．当且仅当$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$且$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2a}=1$，

即$a=b=\dfrac{3}{2}$时取等号．$\therefore a+2b$的最小值为$\dfrac{9}{2}$．故选 B．

3．【答案】D

【解析】终边相同的角相差了360°的整数倍，设与2021°角的终边相同的角是α，则$\alpha=2021^\circ+k\cdot 360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$，当$k=-5$时，$\alpha=221^\circ$．故选 D．

4．【答案】D

【解析】$\because\ \cos(\alpha-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{3}{5}$，$\therefore \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\dfrac{4}{5}$．故选 D．

5．【答案】A

【解析】$\because a=\log_3 4>\log_3 3=1$，$0<0.6^{0.4}<0.6^0=1$，即$0<b<1$，$c=\log_{0.5}2=-1$，$\therefore a>b>c$，故选 A．

6．【答案】B

【解析】函数$f(x)=\cos(2x+\varphi)$的图象关于点$(\dfrac{\pi}{6},0)$对称，所以$f(\dfrac{\pi}{6})=\cos(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=0$，故：

$\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，整理得：$\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，当$k=0$时，$|\varphi|$的最小值为$\dfrac{\pi}{6}$．故选 B．

7．【答案】A

【解析】因为函数$f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+m}$是定义域为$\mathbf{R}$的奇函数，所以$f(-1)=-f$（1），即

$\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{1+m}=-\dfrac{-2+1}{4+m}$，解得$m=2$，所以$f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$，在$\mathbf{R}$上为减函数，不等式$f(x)+f(1+x)>0$，即$f(x)>-f(1+x)$，即$f(x)>f(-1-x)$，所以$x<-1-x$，解得

$x<-\dfrac{1}{2}$，即不等式的解集为$\left\{x\,|\,x<-\dfrac{1}{2}\right\}$．故选 A．

8．【答案】B

【解析】$\because$ 函数$f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$，

故 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故排除 A．

故 $f(x)$ 的最大值为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故 B 确．

在 $(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$ 上，$2x-\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2})$，函数 $f(x)$ 单调递减，故排除 C．

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 不是最值，故 $f(x)$ 的图象关不于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，故排除 D，故选 B．

9．【答案】D

【解析】$\because\ \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=3$，$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=3$，即 $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=3$，

$\therefore \sin 2\theta=\frac{2}{3}$，$\therefore\ \cos^2(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\cos(2\theta+\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{1-\sin 2\theta}{2}=\frac{1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{6}$．故选 D．

10．【答案】D

【解析】$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，由 $f(x)=\lg(3x+1)-1>0$ 得 $x>3$，根据偶函数对称性可知，当 $x<0$ 时，$x<-3$，综上可得 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty，-3)\cup(3，+\infty)$．故选 D．

11．【答案】C

【解析】由图象可得，$A=1$，$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}$，解得 $T=\pi$，$\therefore\ \omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

$\because\ \sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=1$，$\therefore\ \frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\because\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

$\because$ 函数 $g(x)$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $f(x)$ 的图象，

$\therefore\ g(x)=\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，

对于 A，$\because x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，$\therefore\ 2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$，$\therefore f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值是 $\frac{1}{2}$，故 A 正确，

对于 B，$\because\ f(\frac{4}{3}\pi)=\sin(2\times\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{3})=0$，$\therefore\ (\frac{4\pi}{3},0)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心，故 B 正确，

对于 C，$\because x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，$\therefore\ 2x+\frac{2\pi}{3}\in(\frac{7}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi)$，$g(x)$ 在 $(\frac{7}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi)$ 上不恒单调，故 C 错误，

对于 D，$\because\ g(\frac{\pi}{6})=\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})=0$，$\therefore g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6},0)$ 对称，故 D 正确．

故选 C．

12．【答案】B

【解析】要使函数有意义，则 $6+x-2x^2>0$，解得 $-\frac{3}{2}<x<2$，故函数的定义域是 $(-\frac{3}{2}，2)$．令 $t=-2x^2+x-6$ 则函数 t 在 $(-\frac{3}{2}，\frac{1}{4})$ 上递增，在 $[\frac{1}{4}，2)$ 上递减，又因函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} t$

在定义域上单调递减，故由复合函数的单调性知 $y=\log_{\frac{1}{2}}(6+x-2x^2)$ 的单调递增区间是 $[\frac{1}{4}，2)$．故选 B．

13．【答案】2π

【解析】由扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times r^2=3\pi\Rightarrow r=3$．此扇形所含的弧长 $l=\alpha r=\frac{2\pi}{3}\times 3=2\pi$，故答案为：$2\pi$．

14．【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】由对数的运算性质可得 $\log_2 m+\log_2 n=\log_2 mn=1$，$\therefore mn=2$．

由基本不等式可得 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}=2\sqrt{2}$．当且仅当 $m=n=\sqrt{2}$ 时，等号成立．

故答案为：$2\sqrt{2}$．

15．【答案】$[2，3)$

【解析】$\because f(x)=\begin{cases}(3-a)x-1 & (x<1)\\ \log_a x & (x\geqslant 1)\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$\therefore \begin{cases}3-a>0\\ a>1\\ 3-a-1\leqslant \log_a^1\end{cases}$，$\therefore a\in[2，3)$，

故答案为：$[2，3)$．

16．【答案】①④

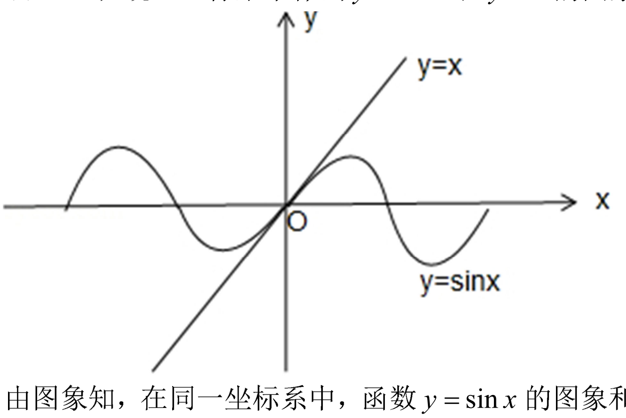
【解析】$\because$ 函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=-\cos 2x$，最小正周期是 $T=\pi$，故①正确；

终边在 y 轴上的角的集合是 $\{a\,|\,a=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$；故②不正确；

法 1°：由 $\begin{cases}y=\sin x\\ y=x\end{cases}$ 得 $\sin x=x$，令 $g(x)=x-\sin x$，$g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，故 $g(x)=x-\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，当 $x=0$ 时 $g'(0)=0$，

$\therefore g(x)_{\min}=g(0)=0$，即在同一坐标系中，函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有一个公共点，故③不正确，

法 2°：在统一坐标系中作出 $y=\sin x$ 和 $y=x$ 的图象，



由图象知，在同一坐标系中，函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有一个公共点，故③不正确；

函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=3\sin 2x$，故④正确；

$\because$ $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上是增函数，故⑤不正确.

故答案为：①④.

17. 【答案】（1） $A=\{x\,|\,\frac{x-5}{x-2}\leqslant 0\}=\{x\,|\,2<x\leqslant 5\}$，

$B=\{x\,|\,x^2-2ax+(a^2-1)<0\}=\{x\,|\,a-1<x<a+1\}$．

当 $a=2$ 时， $B=(1,3)$，（3 分）

则 $\complement_U A=\{x\,|\,x>5$ 或 $x\leqslant 2\}$， $\complement_U B=\{x\,|\,x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 1\}$，

则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x\,|\,x>5$ 或 $x\leqslant 1\}$．（5 分）

（2）若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要不充分条件，

则 $B\subsetneqq A$，（7 分）

则 $\begin{cases}a+1\leqslant 5\\ a-1\geqslant 2\end{cases}$，得 $\begin{cases}a\leqslant 4\\ a\geqslant 3\end{cases}$，得 $3\leqslant a\leqslant 4$，

即实数 a 的取值范围是 $[3，4]$．（10 分）

18. 【答案】（1） $\lg 25+\frac{2}{3}\lg 8-\log_2 27\times\log_3 2+2^{\log_4 9}$

$=2\lg 5+2\lg 2-\frac{\lg 27}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}+2^{\log_2 3}$

$=2-3+3$

$=2$．（6 分）

（2） $\cos(-\frac{14}{3}\pi)+\sin(\frac{5}{3}\pi)\cdot\tan(\frac{20}{3}\pi)-\sin(\frac{7}{2}\pi)$

$=\cos(-6\pi+\frac{4\pi}{3})+\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})\cdot\tan(6\pi+\frac{2\pi}{3})-\sin(4\pi-\frac{\pi}{2})$

$=-\frac{1}{2}+(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times(-\sqrt{3})-(-1)$

$=2$．（12 分）

19. 【答案】（1）已知 $\sin\theta=\frac{4}{5}$， $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$．

所以 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$．（6 分）

（2） $\frac{\sin^2\theta+\sin 2\theta}{3\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta}{3\tan^2\theta+1}=-\frac{8}{57}$．（12 分）

20. 【答案】（1） f（2） $=2^2-1=3$， $f(-1)=-f$（1） $=-(2^1-1)=-1$，

故 f（2） $+f(-1)=2$．（4 分）

（2）当 $x<0$ 时， $-x>0$，则 $f(-x)=2^{-x}-1$，（6 分）

又 $\because f(x)$ 为奇函数，

$\therefore f(x)=-f(-x)=-2^{-x}+1$，

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}2^{x}-1,x\geqslant 0\\ -2^{-x}+1\cdot x<0\end{cases}$．（8 分）

（3）由（2）的可知：当 $x<0$ 时，$-7\leqslant -2^{-x}+1<0$，解得 $-3\leqslant x<0$，（10 分）

当 $x\geqslant 0$ 时，$0\leqslant 2^{x}-1\leqslant 3$，解得 $0\leqslant x\leqslant 2$，

综上所述 $A=[-3，2]$．（12 分）

21．【答案】（1）$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})+4\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\cos 2x$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，（4 分）

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为：$[k\pi-\frac{\pi}{3}，k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$，单调递减区间为：$[k\pi+\frac{\pi}{6}，k\pi+\frac{2\pi}{3}]$，$k\in\mathbf{Z}$．（8 分）

（2）当 $x\in[-\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{12}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{3}]$，（9 分）

可得 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $-1\leqslant 2\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant\sqrt{3}$，

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1，\sqrt{3}]$．（12 分）

22．【答案】（1）$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2^{x}}{1+2^{x}}-\frac{1}{2}$．

$\therefore f(-x)+f(x)=\frac{2^{x}}{1+2^{x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2^{x}+1}{1+2^{x}}-1=0$．（4 分）

$\therefore f(-x)=-f(x)$．

$\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数．（6 分）

（2）$\because y=2^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 是增函数，$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2^{x}+1}-\frac{1}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数．

$\because f(t^{2}-2t)+f(2t^{2}-k)<0$，$\therefore f(t^{2}-2t)<-f(2t^{2}-k)=f(k-2t^{2})$．

$\therefore t^{2}-2t>k-2t^{2}$，即 $k<3t^{2}-2t$．（10 分）

令 $g(t)=3t^{2}-2t=3(t-\frac{1}{3})^{2}-\frac{1}{3}$，则 $g(t)$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$．

$\therefore k<-\frac{1}{3}$．$\therefore k$ 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{1}{3})$．（12 分）