中原名校 2021—2022 学年假期汇编试题

高一数学参考答案（五）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．D

【解析】A 选项，$\{\varnothing\}$ 中有元素 $\varnothing$，$\{a, b\}$ 中有元素 a、b，$\{\varnothing\}$ 不包含于 $\{a, b\}$，A 错，B 选项，$\{(a, b)\}$ 中有元素 (a, b)，$\{a, b\}$ 中有元素 a、b，$\{(a, b)\}$ 不包含于 $\{a, b\}$，B 错，C 选项，$\because \{b, a\} = \{a, b\}$，$\therefore$C 错，D 选项，$\varnothing$ 是任意集合的子集，D 对，故选 D.

2．C

【解析】$\because$ 直线 $Ax + By + C_1 = 0$(A, B 不同时为 0) 与直线 $Ax + By + C_2 = 0$ $(C_1 \neq C_2)$ 之间的距离 $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$，$\therefore$ 直线 l_1 与直线 l_2 之间的距离 $d = \dfrac{|-3-7|}{\sqrt{4+16}} = \sqrt{5}$．故选 C．

3．A

【解析】在圆方程 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$ 中令 $y = 0$，得 $x^2 + 4x + 2 = 0$，

$\therefore x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$ 因此弦长为 $|-2+\sqrt{2}-(-2-\sqrt{2})| = 2\sqrt{2}$.故选 A.

4．D

【解析】因为该二次函数图象的对称轴为 $x = 1$，而 $f(0) = 3$，$f(1) = 2$，$f(2) = 3$，所以当定义域是 $[0, t]$，值域是 $[2, 3]$ 时，需要 $1 \le t \le 2$．故选 D.

5．D

【解析】A，若 $m \parallel n, n \parallel l, l \parallel \alpha$，则 $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$，故 A 错误；B，若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha$，则 m 可能与 β 成任意角度，故 B 错误；C，若 $m \perp l, l \perp \beta$，则 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$，故 C 错误；D，由 $m \perp \alpha, m \parallel n$，得 $n \perp \alpha$，又 $\alpha \parallel \beta$，得 $n \perp \beta$．故 D 正确．故选 D.

6．C

【解析】 $p = \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 8 \times \log_8 9 \times \log_9 10 = \dfrac{\lg 6}{\lg 5} \times \dfrac{\lg 7}{\lg 6} \times \dfrac{\lg 8}{\lg 7} \times \dfrac{\lg 9}{\lg 8} \times \dfrac{\lg 10}{\lg 9} = \log_5 10$，

而 $\log_5 5 < \log_5 10 < \log_5 25$，所以 $p \in (1, 2)$，故选 C.

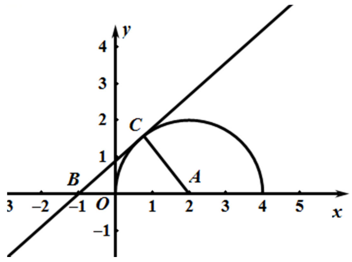
7．B

【解析】$k_1 = \tan\alpha = \sqrt{3}$，$\alpha = 60^\circ$，所以 $k = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$，所以直线 l 的方程是：

$y - 1 = -\sqrt{3}(x+1)$，即 $\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} - 1 = 0$.故选 B.

8．A

【解析】 $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$，即 $(x-2)^2 + y^2 = 4(y \ge 0)$，



直线 $y=k(x+1)$ 过定点 $(-1,0)$，

画出图像，如图所示：

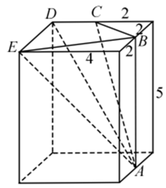
当直线与半圆相切时， $AB=3$ ， $AC=2$ ，

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5}$.

此时斜率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，根据图像知 $k\in\left[0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.故选 A.

9．C

【解析】由题得几何体原图是下图中的四棱锥 $A-BCDE$ ，



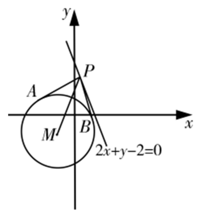
底面四边形 $BCDE$ 的面积为 $4\times4-\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times2\times2=10$ ，

∴四棱锥的体积为 $\frac{1}{3}\times10\times5=\frac{50}{3}$ ，故选 C.

10．B

【解析】由⊙ $M:x^2+y^2+2x+2y-2=0$ ，得 $(x+1)^2+(y+1)^2=4$ ，所以圆心 $M(-1,-1)$ ，

半径 $r=2$ ，四边形 $PAMB$ 面积 $S=2S_{\triangle PAM}=2\times\frac{1}{2}\times PA\times AM=2PA$ ，



又 $PA=\sqrt{PM^2-AM^2}=\sqrt{PM^2-4}$ ，所以当 PM 最短时，四边形 $PAMB$ 面积最小，此时 $|PM|=\frac{|2\times(-1)+(-1)-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ ，

所以 $S_{\min}=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-4}=2$ ，故选 B.

11．C

【解析】因为 $f(x)-g(x)=e^x$ ①，所以 $f(-x)-g(-x)=e^{-x}$ ，因为函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 分别是定义在 R 上的偶函数、奇函数，所以 $f(-x)=f(x)$ ， $g(-x)=-g(x)$ ，所以 $f(x)+g(x)=e^{-x}$ ②，联立①、②，解得： $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ， $g(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$ ，所以 $f(0)=\frac{1}{2}(e^0+e^0)=1$ ， $g(-1)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})$ ， $g(-2)=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})$ ，因为 $e\approx2.718$ ，所以 $g(-2)>g(-1)>1$ ，即 $f(0)<g(-1)<g(-2)$ ，故选 C.

12．B

【解析】过点 A，B，C，D 作球 O 的截面如图 1，设 AB 的中点为 O_1，连接 O_1C，O_1D，则 $CD\parallel O_1A$，且 $CD=O_1A$，所以四边形 $ADCO_1$ 是平行四边形，所以 $O_1C=1$，同理 $O_1D=1$，所以 $O_1A=O_1B=O_1C=O_1D$，所以 O_1 到等腰梯形 $ABCD$ 各个顶点的距离都相等，过点 S，A，B 作球 O 的截面，如图 2，设 BS 的中点为 O，连接 O_1O，OA，则 $O_1O\parallel SA$，所以 $O_1O\perp$ 平

面 $ABCD$，所以 $OA=OB=OC=OD$，又 $SA\perp AB$，所以 $OA=OS$，所以点 O 是四棱锥 $S–ABCD$ 外接球的球心，在 Rt△SAB 中，$AB=SA=2$，所以 $OA=\frac{1}{2}BS=\sqrt{2}$，所以 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$，故选 B.

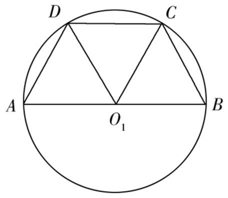


图1

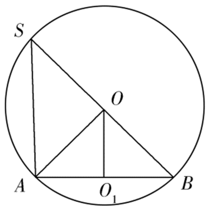


图2

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．$(1,2)$　　14．2020　　15．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　16．$1<a\leq 2$

13．

【解析】直线 $x-my-1+2m=0$ 可化为: $(x-1)+m(2-y)=0$，当 $\begin{cases}x-1=0\\2-y=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

$\therefore$ 直线 $x-my-1+2m=0$ 恒过一个定点为 $(1,2)$.

14．

【解析】$\because f\left(x_1x_2\ldots x_{2021}\right)=1010$，$\therefore \log_a\left(x_1x_2\ldots x_{2021}\right)=1010$；

$\therefore f\left(x_1^2\right)+f\left(x_2^2\right)+\ldots+f\left(x_{2021}^2\right)=\log_a\left(x_1^2\right)+\log_a\left(x_2^2\right)+\ldots+\log_a\left(x_{2021}^2\right)$

$=\log_a\left(x_1^2x_2^2x_3^2\ldots x_{2021}^2\right)=2\log_a\left(x_1x_2\ldots x_{2021}\right)=2020$.

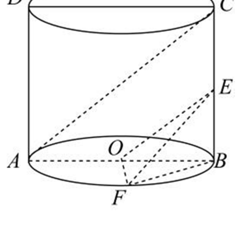
15．

【解析】设圆柱底面半径为 r，则母线长为 $2r$，由题易得 $r=2$.

设底面圆心为 O，连接 OE，OF.则 $OE/\!/AC$，所以 $\angle OEF$ 为异面直线 AC，EF 所成的角.

在 $Rt\Delta OEF$ 中，$OF=2, OE=2\sqrt{2}, EF=2\sqrt{3}$.

所以 $\cos\angle OEF=\frac{OE}{EF}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



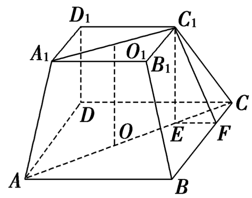
16．

【解析】由 $\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}>0(x_1\neq x_2)$ 成立，知函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

只需满足：$\begin{cases} a>1 \\ \dfrac{1-a}{2}<0 \\ -\dfrac{1}{2\times\dfrac{1-a}{2}}\ge 1 \\ \dfrac{1-a}{2}-\dfrac{1}{4}\le \log_a 1=0 \end{cases}$，解得$1<a\le 2$即为所求.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．【解析】



如图，设O_1、O分别为上、下底面的中心，过C_1作$C_1E\perp AC$于E，过E作$EF\perp BC$于F，连接C_1F，则C_1F为正四棱台的斜高，………………………………2 分

由题意知$\angle C_1CO=45^\circ$，

$CE=CO-EO=CO-C_1O_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(9-3)=3\sqrt{2}$，

又$EF=CE\cdot\sin 45^\circ=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$，…………6 分

∴斜高$C_1F=\sqrt{C_1E^2+EF^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+3^2}=3\sqrt{3}$，…………………………8 分

∴$S_{侧}=\dfrac{1}{2}\times(3+9)\times 3\sqrt{3}\times 4=72\sqrt{3}$．…………………………………………10 分

18．【解析】

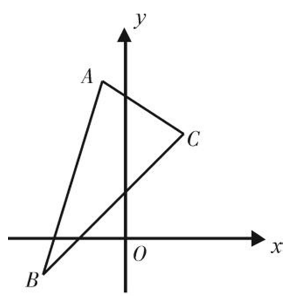
（1）设AC边中点为M，则M点坐标为$(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2})$，……………………………1 分

∴直线$k_{BM}=\dfrac{\dfrac{7}{2}+1}{\dfrac{1}{2}+2}=\dfrac{9}{5}$，∴直线$BM$的方程为：$y-(-1)=\dfrac{9}{5}(x+2)$，

即$9x-5y+13=0$，…………………………………………………………………4 分

∴AC边中线所在直线的方程为：$9x-5y+13=0$………………………………6 分

（2）设点D的坐标为$(x，y)$，由已知得M为线段BD的中点，



有$\begin{cases} \dfrac{-2+x}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1+y}{2}=\dfrac{7}{2} \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=3 \\ y=8 \end{cases}$，

∴$D(3,8)$…………………………………8 分

又∵$B(-2,-1)$、$C(2,3)$，

则$|BC|=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$ ……………………………12 分

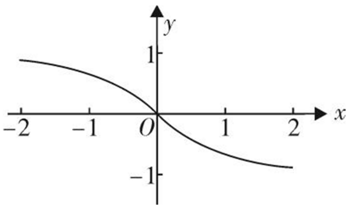
19. 【解析】

（1）当$x<0$时，$-x>0$，$f(-x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}-1=3^x-1$，………………………2 分

又$f(x)$是奇函数，$f(-x)=-f(x)$，

故$f(x)=-3^x+1$；当$x=0$时，$f(0)=0$，满足$x>0$的解析式；……………4 分

所以$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x-1, x\ge 0\\ -3^x+1, x<0\end{cases}$ ………………………6 分



（2）由（1）可知$f(x)$图象如图，

所以$f(x)$在R上单调递减，

故$f(2-5x)<f\left(2x^2-mx+20\right)$

等价于$2-5x>2x^2-mx+20$，…………………………………………………8 分

分离变量得$m>2\left(x+\frac{9}{x}\right)+5$对$x\in[2,4]$恒成立，………………………10 分

只需要$m>\left[2\left(x+\frac{9}{x}\right)+5\right]_{\max}$，……………………………………………11 分

解得$m>18$，故m取值范围为$(18,+\infty)$.…………………………………………12 分

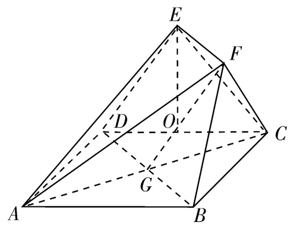
20. 【解析】

（1）证明：∵$AB=2, AE=3, DE=\sqrt{5}$，由勾股定理得：$AD\perp DE$，

又正方形$ABCD$中$AD\perp DC$，且$DE\cap DC=D$

∴$AD\perp$平面EDC，又∵$AD\subset$面$ABCD$，

∴平面$ABCD\perp$平面EDC ……………………6 分



（2）由已知$\cos\angle \mathrm{CDE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，连接$AC$交$BD$于$G$

作$OE\perp CD$于O，则$OD=DE\cdot\cos\angle EDC=1, OE=2$

又由（1）知平面$ABCD\perp$平面EDC，平面$ABCD\cap$平面$EDC=CD$，

$OE\subset$面EDC，得$OE\perp$面$ABCD$

由$EF//BD, EF=\sqrt{2}$，知四边形$DEFG$为平行四边形，即$DE//FG$，

而$V_{A-EFC}=V_{E-AFC}$，进而$V_{A-EFC}=V_{E-AFC}=V_{D-AFC}=V_{F-ADC}$

又由$EF//BD$，$V_{F-ADC}=V_{E-ADC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$

所以，三棱锥 $A-EFC$ 的体积 $\frac{4}{3}$ ……………………………………………12 分

21．【解析】

（1）$h(x)=\log_a(-x^2+\frac{7}{2}x),\ x\in[\frac{1}{2},3]$．

$-x^2+\frac{7}{2}x=-(x-\frac{7}{4})^2+\frac{49}{16}\in[\frac{3}{2},\frac{49}{16}]$ ……………………………………………3 分

当 $a>1$ 时，$h(x)_{\min}=\log_a\frac{3}{2}=-2\Rightarrow a$ 不存在；…………………………4 分

当 $0<a<1$ 时，$h(x)_{\min}=\log_a\frac{49}{16}=-2\Rightarrow a=\frac{4}{7}$． ………………………5 分

综上，实数 a 的值为 $\frac{4}{7}$．

（2）由题知，函数 $h(x)$ 在 $[\frac{1}{2},3]$ 上的值域是 $\varphi(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上值域的子集……6 分

易得 $\varphi(x)$ 的值域为 $[-2,+\infty)$． ……………………………………………………7 分

当 $a>1$ 时，$h(x)$ 的值域为 $[\log_a\frac{3}{2},\log_a\frac{49}{16}]$，

应有 $\log_a\frac{3}{2}\geq-2\Rightarrow a>1$ 时均符合……………………………………………9 分

当 $0<a<1$ 时，$h(x)$ 的值域为 $[\log_a\frac{49}{16},\log_a\frac{3}{2}]$

应有 $\log_a\frac{49}{16}\geq-2\Rightarrow 0<a\leq\frac{4}{7}$ ……………………………………………11 分

综上，实数 a 的取值范围为 $(0,\frac{4}{7}]\cup(1,+\infty)$． ……………………………12 分

22．【解析】

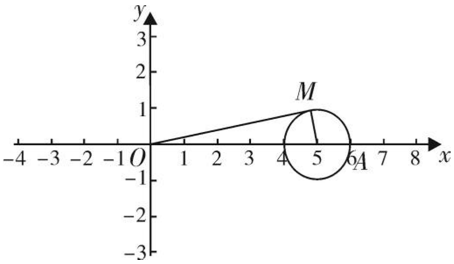
（1）设圆 C 的方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，……………………………………1 分

则有 $\begin{cases}-D+\frac{E}{2}-8=0,\\ 4+2D+F=0,\\ 20+4D-2E+F=0.\end{cases}$ ……………………………………………3 分

解得 $\begin{cases}D=-8,\\ E=0,\\ F=12.\end{cases}$ ……………………………………………………5 分

∴圆 C 的方程为：$x^2+y^2-8x+12=0$. ……………………………………………6 分

（2）由（1）知$C:(x-4)^2+y^2=4$，



设$P(x_0,y_0),M(x,y)$，则$\begin{cases}\dfrac{6+x_0}{2}=x\\ \dfrac{0+y_0}{2}=y\end{cases}$，

$\begin{cases}x_0=2x-6\\ y_0=2y\end{cases}$，……………………………………8 分

又P在圆$C:(x-4)^2+y^2=4$上，$\therefore(x_0-4)^2+{y_0}^2=4$，$\therefore(2x-10)^2+(2y)^2=4$，

M的轨迹方程为$(x-5)^2+y^2=1$.……………………………………………………………………9 分

数形结合易知当OM与$(x-5)^2+y^2=1$相切时，$\tan\angle MOA$取最大值，…………11 分

此时$OM=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}$，所以$\tan\angle MOA=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.…………………………12 分